https://jrl.ui.ac.ir/?lang=en

Journal of Researches in Linguistics
E-ISSN: 2322-3413
18(2), 33-48
Received: 25.11.2024 Accepted: 25.05.2025

Research Paper

A descriptive study of mathematical infinity and limit based on cognitive semantics

Nasser Hafezi-Motlagh
Ph.D. Candidate of Cognitive Linguistics, Department of Linguistics, Faculty of Letters and Humanities, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
n_hafezi@um.ac.ir

Mohammad Reza Pahlavannezhad *
Professor, Department of Linguistics, Faculty of Letters and Humanities, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
pahlavan@um.ac.ir

Abstract
The hypothesis of embodied mathematics grounded in cognitive semantics posits that the foundation and origin of mathematical concepts stem from human embodiment. Consequently, opposing theories, such as mathematical Platonism, which assert the existence of mathematics independent of human cognition, are not supported by recent findings in cognitive sciences. This research employed a descriptive-analytical method to explore the cognitive origins of concepts, such as mathematical infinity, limits, and related ideas like transfinite numbers, derivatives, and integrals, all through the lens of embodied mathematics. In addition to detailing the concepts of numbers and sets, this study examined infinity through the foundational metaphor of infinity, a type of conceptual metaphor. Building on this framework, the analysis included infinitesimals, the concept of limits, transfinite numbers, and the principles of differential and integral calculus, focusing on the derivative and integral. Furthermore, it elucidated the role of image schemas and conceptual structures, such as metonymy, metaphor, and blending, in the formation of basic arithmetic concepts, drawing on linguistic intuition and introspective insights. This research provided a descriptive study of the origins of fundamental arithmetic concepts based on embodiment and the conceptual structures derived from the second generation of cognitive sciences.
Keywords: Embodied Mathematics, Conceptual Metaphor, Conceptual Blending, Infinity, Limit.

Introduction
According to the second generation of cognitive sciences, embodied perception, which arises from human embodiment, alongside the formation of image schemas as the abstract foundation of our thinking and cognition, facilitates conceptual mappings and projections, such as conceptual metaphors and blending. These insights not only illuminate the reflections of human thought, but also pave new avenues in the epistemology of various other sciences. Building on this foundation, the hypothesis of embodied mathematics proposed by Lakoff and Núñez seeks to identify the origins of mathematics and its role within human cognitive faculties. This hypothesis posits that mathematics, as we understand it, is not a transcendent or external entity but rather a physical and internal construct. As such, traces of conceptual structures as discussed in cognitive sciences and cognitive linguistics can be observed within mathematics. Consequently, the influence of structures that shape the conceptualization process—such as image schemas, metaphors, and conceptual blends—plays a crucial role in embodied mathematics. Arithmetic, traditionally considered the oldest branch of mathematics, has been integral to human interaction with numbers and calculations since ancient times, predating other mathematical disciplines. Therefore, it is argued that embodiment is more pronounced in arithmetic

*Corresponding author

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

compared to other branches of mathematics. The evolution of arithmetic, which has permeated various other mathematical fields, has further developed this embodiment, leading to the creation and innovation of new and significant concepts. The research question explored in this article is: How are mathematical concepts and their formations influenced by embodiment, conceptual blending, and metaphor? In contrast to the opposing hypothesis of Mathematical Platonism, which posited that mathematical concepts are universal realities existing independently of human cognition—implying that our relationship with them is purely one of discovery—we considered the alternative hypothesis of embodied mathematics. This perspective rejected the notion that these concepts are pre-existing, mental, or objective entities that exist independently of humans. Given this framework, how could we describe the formation and emergence of mathematical concepts through the lens of embodiment and the conceptual structures derived from it? Among the numerous fundamental mathematical concepts selected for analysis, some were more foundational and took precedence. Notably, certain elementary concepts of arithmetic played a particularly significant role. To address the research question related to the framework for describing basic concepts of arithmetic, this study examined concepts like number, infinity, infinitesimals, limits, and transfinite numbers. These concepts were analyzed through the lens of conceptual structures, including blending and metaphor.

Materials & Methods

Conceptual structures that emerge from embodiment, particularly at an abstract level through image schemas, play a crucial role in meaning-making. Among the most significant conceptual structures are conceptual metaphor, conceptual metonymy, and conceptual blending. A *conceptual metaphor* involves mapping from one domain to another. In essence, a metaphor serves as a linguistic and cognitive figure that allows one concept to refer to or illuminate another related concept. The key distinction between a conceptual metaphor and conceptual metonymy lies in their mapping processes: metonymy connects elements within the same domain, while metaphor establishes connections across different domains. Thus, conceptual metaphors are formed by mapping one conceptual domain onto another and their implications can be traced within the hypothesis of embodied mathematics. *Conceptual blending* refers to the combination of two distinct cognitive structures that maintain fixed correspondences. This blending process generates new entities as the selective properties of two concepts combine to form a third concept. In the theory of conceptual blending, a dynamic process facilitates the integration of various domains within mental space, leading to the emergence of new conceptual structures in real-time. These conceptual frameworks can be effectively applied to describe arithmetic concepts, illustrating how the principles of embodied mathematics manifest through these cognitive structures.

This research employed a descriptive-analytical approach grounded in linguistic intuition and introspective analysis. The study focused on arithmetic concepts as the primary data for investigation.

Discussion of Results & Conclusion

The embodiment of arithmetic, traditionally recognized as the oldest branch of mathematics, is both evident and easily observable. For instance, the decimal counting system is derived from the number of fingers and toes. Additionally, natural numbers represent whole entities through metonymy and other sets of numbers can be derived from these foundations. Arithmetic operators, which emerge from the basic addition operator, are rooted in image schemas. Concepts like infinity, infinitesimals, and transfinite numbers arise from conceptual metaphors. The concept of a limit is informed by the "basic metaphor of infinity", while differential and integral calculus represents a generalization of this metaphor, as well as the concept of limit. This leads to the development of foundational concepts, such as "derivative" (differential) and "integral". Overall, these insights highlight the interconnectedness of embodiment and arithmetic, demonstrating how fundamental mathematical concepts are shaped by our cognitive structures.

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

نشریه پژوهش‌های زبان‌شناسی
سال هجدهم، شماره دوم، شماره ترتیبی۳۵، ۱۴۰۵، ص ۳۳-۴۸
تاریخ وصول: ۱۴۰۳/۰۹/۰۵ تاریخ اصلاحات: ۱۴۰۴/۰۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۰۴

مقاله پژوهشی

بررسی توصیفی مفهوم بی‌نهایت ریاضی و حد بر پایهٔ معناشناسی شناختی

ناصر حافظی مطلق[*]
محمدرضا پهلوان‌نژاد[**]

چکیده
بر اساس فرضیهٔ ریاضیات جسمانی، که بر پایهٔ معناشناسی شناختی بنا شده است، مبنا و خاستگاه مفاهیم ریاضی، جسمانیت انسان است و لذا فرضیات مخالف نظیر ریاضیات افلاطونی، که هستی ریاضیات را مستقل از انسان فرض می‌کنند، مورد تأیید علوم شناختی متأخر نیستند. در این پژوهش بر مبنای روش توصیفی- تحلیلی و بر پایهٔ فرضیهٔ ریاضیات جسمانی، خاستگاه شناختی مفهوم بی‌نهایت ریاضی، حد و سایر مفاهیم برآمده از آن‌ها نظیر اعداد ترامتناهی، مشتق و انتگرال موردبررسی توصیفی قرارگرفته‌اند. در این پژوهش ضمن توصیف مفهوم عدد و مجموعه‌های اعداد؛ مفهوم بی‌نهایت بر اساس استعارهٔ پایهٔ بی‌نهایت که نوعی استعارهٔ مفهومی است توصیف‌شده و بر این اساس اعداد بی‌نهایت کوچک، مفهوم حد، اعداد ترامتناهی و درنهایت حساب دیفرانسیل و انتگرال یا حسابان که بر مبنای دو مفهوم مشتق یا دیفرانسیل و انتگرال بنا شده است، تحلیل‌شده‌اند. بر این مبنا نقش طرح‌واره‌های تصویری، ساختارهای مفهومی مانند مجاز، استعاره و آمیزه در شکل‌گیری مفاهیم پایهٔ علم حساب بر اساس شم زبانی و به شکل درون‌نگرانه قابل توصیف است و این تحقیق به بررسی توصیفی خاستگاه مفاهیم پایهٔ علم حساب بر اساس بدنمندی و ساختارهای مفهومی برآمده از نسل دوم علوم شناختی پرداخته است.

کلیدواژه‌ها: ریاضیات جسمانی، استعارهٔ مفهومی، آمیزهٔ مفهومی، بی‌نهایت، حد

[*] دانشجوی دکتری علوم شناختی- زبان‌شناسی، گروه زبانشناسی، دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران n_hafezi@um.ac.ir
[**] استاد گروه زبان‌شناسی، دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران (نویسنده مسئول) pahlavan@um.ac.ir

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

۱. مقدمه

بر اساس نسل دوم علوم شناختی، ادراک جسمانی برآمده از بدنمندی[1] و شکل‌گیری طرح‌واره‌های تصویری[2] به‌عنوان زیرساخت انتزاعی بخش نظام تفکر و شناخت انسانی و نگاشت‌ها و فرافکنی‌های مفهومی نظیر استعارهٔ مفهومی[3] و آمیزهٔ مفهومی[4] و مواردی ازاین‌دست، نه‌فقط راهگشای مسیرهایی جدید به شناخت بازتاب‌های اندیشه انسانی هستند، که راه‌های نو و نوینی را نیز هم در معرفت‌شناسی سایر علوم می‌گشایند. بر همین مبنا فرضیهٔ ریاضیات جسمانی[5] تلاش بر این دارد که خاستگاه ریاضیات و جایگاه آن در قوای شناختی انسان را شناسایی کند. ازآنجاکه طبق این فرضیه، ریاضیات به آن صورتی که ما می‌شناسیم نه یک امر متعالی و بیرونی که یک امر جسمانی و درونی است، رد پای ساختارهای مفهومی به آن‌گونه که در علوم شناختی و زبان‌شناسی شناختی بحث می‌شود، در آن قابل رصد است. لذا نقش ساختارهای مؤثر بر نظام مفهوم‌سازی ازجمله طرح‌واره‌های تصویری و استعاره‌ها و آمیزه‌های مفهومی در ریاضیات جسمانی نیز پررنگ و کلیدی است.

علم حساب به روایتی کهن‌ترین شاخه از ریاضیات است، زیرا که انسان از دیرباز و پیش از سایر شاخه‌های ریاضی با عدد و شکل‌هایی از محاسبه سروکار داشته است. بر همین اساس انتشار می‌رود که بدنمندی و جسمانیت در حساب بیشتر از سایر شاخه‌های ریاضیات نمود داشته باشد و تطور علم حساب که در شاخه‌های مختلف دیگر ریاضیات هم نفوذ کرده، این بدنمندی مرتبط با حساب را توسعه داده و سبب خلق و ابداع مفاهیم جدید و بسیار پراهمیتی شده است.

سؤال پژوهش در این مقاله این است که مفاهیم ریاضی و شکل‌گیری آن‌ها بر مبنای بدنمندی، آمیزهٔ مفهومی و استعاره چگونه خواهند بود؟ بدیهی است که بر مبنای فرضیهٔ مخالف، یعنی ریاضیات افلاطونی، مفاهیم ریاضی واقعیات جهان‌شمولی هستند که مستقل از انسان موجود بوده و نسبت بشر با آن‌ها فقط از جنس کشف است. حال در صورت باور به فرضیهٔ بدیل، یعنی ریاضیات جسمانی، که این مفاهیم را به‌عنوان امر پیشینی[6] و هستی‌های ذهنی یا عینیِ از پیش موجود و مستقل از انسان نمی‌داند، توصیف شکل‌گیری و پیدایش مفاهیم ریاضی بر مبنای جسمانیت و ساختارهای مفهومی برآمده از آن چگونه خواهد بود؟ از میان تعدادِ زیادِ مفاهیم پایهٔ ریاضی منتخب برای توصیف در چنین قالبی، بعضی از مفاهیم اساسی‌تر بوده و اولویت دارند. ازجملهٔ این موارد برخی از مفاهیم ابتدایی علم حساب، نقش ویژه‌تری خواهد داشت. در این پژوهش به‌منظور پاسخ به پرسش تحقیق که همبسته است با چارچوب توصیف مفاهیم پایهٔ علم حساب، مفاهیمی نظیر عدد، بی‌نهایت، اعداد بی‌نهایت کوچک، حد، اعداد ترامتناهی و ...، بر اساس ساختارهای مفهومی مبتنی بر جسمانیت مانند آمیزه و استعاره توصیف‌شده‌اند.

۲. پیشینهٔ تحقیق

افلاطون،[7] فیلسوف یونانی سدهٔ پنجم و چهارم پیش از میلاد، بر این اعتقاد بود که اشیا ریاضی مانند اعداد و پدیده‌های هندسی به شکل غیرفیزیکی و مستقل از انسان موجود هستند و وظیفهٔ ریاضیات تنها کشف آنان است (صالمصلحیان، ۱۳۸۴:۱۱۰؛ Livio, 2010:21). دیدگاه افلاطونی در ریاضیات که به ریاضیات افلاطونی مشهور است، پیشگام یکی از مکاتب فلسفهٔ ریاضی به نام واقع‌گرایی[8] است.

در کنار «واقع‌گرایی» که «افلاطون‌گرایی» زیرشاخهٔ آن است، رویکردهایی در فلسفهٔ ریاضی که ریاضیات را یک زبان صوری و نظام نشانه‌ای قلمداد می‌کنند «صورت‌گرایی»[9] نامیده می‌شوند (صالمصلحیان، ۱۳۸۴:۹). رویکردی منتج از «واقع‌گرایی» ریاضی که تلاش در

[1] Embodiment
[2] Image schema
[3] Conceptual metaphor
[4] Conceptual blending
[5] Embodied mathematics
[6] a Priori
[7] Plato
[8] Realism
[9] Formalism

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

فروکاهیدن ریاضیات به منطق دارد را «منطق‌گرایی»[1] می‌نامند (صال‌مصلحیان، ۵:۱۳۸۴) و رویکردی که ریاضیات را مخلوق ذهن می‌داند، «شهودگرایی»[2] نامیده می‌شود. «شهودگرایی» خود زیرمجموعهٔ دیدگاه وسیع‌تری به نام «ساخت‌گرایی»[3] است. مکتب «انسان‌گرایی» ریاضی،[4] ریاضیات را بخشی از فرهنگ بشری می‌داند که در پس‌زمینهٔ عملکرد انسانی و رویدادهای اجتماعی شکل گرفته و تکامل‌یافته است (صال‌مصلحیان، ۳۸:۱۳۸۴). دیدگاه دیگری که در مقابل «افلاطون‌گرایی» قرار می‌گیرد، «نام‌گرایی»[5] است که معتقد است اشیا و روابط ریاضی وجود خارجی و بیرونی ندارند (چه عینی و چه انتزاعی) و «صورت‌گرایی» را می‌توان ذیل آن تقسیم‌بندی کرد (صال‌مصلحیان، ۴:۱۳۸۴).

جرج لیکاف، زبان‌شناس شناختی، و رافائل نونیس، روان‌شناس شناختی، بر این اعتقاد هستند که ریاضیات بدنمند و برآمده از ادراک جسمانی انسان است (Livio, 2010:8). فرضیهٔ ریاضیات جسمانی در مقابل دیدگاه‌های مبتنی بر متعالی بودن ریاضیات، ازجمله ریاضیات افلاطونی قرار می‌گیرد که در آن ادعا بر این بود که ریاضیات خارج از ذهن انسان موجود است و به‌عنوان واقعیت وجود دارد. لیکاف و نونیس چنین دیدگاهی را ریاضیات «رمانتیک»[6] یا «افلاطونی»[7] و یا «متعالی»[8] نام گذاشته‌اند که در نقطهٔ متضاد با فرضیهٔ آنان قرار دارد. این نام‌گذاری برآمده از ایدهٔ افلاطون است که ریاضیات را پُلی میان واقعیتِ جهان و حواس گمراه‌کنندهٔ انسان می‌دانست.

به باور لیکاف و نونیس ریاضیات بخشی از انسان بودن ما است و از بدن‌ها، مغزها و تجربیات هرروزهٔ ما برمی‌خیزد (Livio, 2010:112). لیکاف و نونیس به‌منظور تأیید فرضیهٔ خود مثال‌های متعددی از ریاضیات در حوزهٔ حساب،[9] مجموعه‌ها،[10] جبر بولی،[11] اعداد، مفهوم بی‌نهایت، کاربرد ریاضیات در فیزیک و نظایر آن را موردبحث قرار می‌دهند و با استفاده از ساختارهای مفهومی برآمده از قوای شناختی انسان تلاش در تبیین خاستگاه این مفاهیم و مباحث در بستر بدنمندی انسان دارند.

از دید لیکاف و نونیس قوانین حساب پی‌آمدهای استعاری هستند و استعارهٔ «حساب به‌مثابه کلکسیون شئ»[12] بر آن‌ها حکم‌فرما است (Lakoff & Núñez, 2000:54). بر اساس این استعاره، حوزهٔ مبدأ که اشیا هستند با نگاشتی استعاری به حوزهٔ مقصد که اعداد هستند فرافکنی می‌شوند. بر این اساس عملگرهای حسابی پایه مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم قابل توصیف استعاری بوده و عدد صفر نیز بر اساس نوعی استعارهٔ رایج در ریاضیات به نام استعارهٔ «هستی خلق‌کن»[13] که نبود اشیا را به کلکسیون تهی می‌نگارد خلق می‌شود (Lakoff & Núñez, 2000:64). همچنین استعارهٔ دیگری یعنی «حساب به‌مثابه ساختمان شئ»[14] که روایت خاص‌تری از «حساب به‌مثابه کلکسیون شئ» است، توان تجزیهٔ اعداد به اجزاء و توصیف کسرها را نیز برآورده می‌سازد (Lakoff & Núñez, 2000:65). لیکاف و نونیس استعاره‌های دیگری نظیر «حساب به‌مثابه خط‌کش معیار»[15] و «حساب به‌مثابه حرکت در امتداد یک مسیر»[16] را هم در حوزهٔ حساب استخراج کرده‌اند. لیکاف و نونیس در حوزهٔ «جبر»،[17] «مجاز بنیادین جبر» را معرفی می‌نمایند که این قابلیت را به ما می‌دهد تا حساب عینی را به تفکر جبری عام تعمیم دهیم (Lakoff & Núñez, 2000:74). این مجاز از نوع «کل به‌جای جزء» است که کل را به نیابت از جزء به کار می‌برد و توانایی استفاده از عبارات جبری را به‌عنوان یک کل به نیابت از اجزاء حسابی به ما خواهد داد. مجموع استعاره‌های حسابی و «مجاز بنیادین جبر» دلیلی است

[1] Logicism
[2] Mathematical intuitionism
[3] Constructivism
[4] Humanistic mathematics
[5] Nominalism
[6] Romantic
[7] Mathematical Platonism
[8] Transcendental
[9] Arithmetic
[10] Sets
[11] Boolean algebra
[12] Arithmetic as object collection
[13] Entity-creating
[14] Arithmetic as object construction
[15] The measuring stick metaphor
[16] Arithmetic as motion along a Path
[17] Algebra

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

برای سازگاری حساب با جهان (Lakoff & Núñez, 2000:96).

مفهوم «بی‌نهایت» نیز در فرضیهٔ ریاضیات جسمانی بر اساس «استعارهٔ پایه بی‌نهایت»[۱] ساخته می‌شود (Lakoff & Núñez, 2000:158). «بی‌نهایت واقعی»[۲] بر اساس این استعاره به‌صورت نگاشت یک فرایند در حال اجرا بر یک فرایند کامل‌شده مفهوم‌سازی می‌شود. مثال «بی‌نهایت واقعی» مجموعه‌های نامتناهی نظیر مجموعهٔ اعداد طبیعی است و افزون بر آن «بی‌نهایت بالقوه»[۳] نیز در ریاضیات وجود دارد، مانند ارقام اعشار جذر عدد ۲ و یا افزایش اضلاع چندضلعی‌های منتظم (Lakoff & Núñez, 2000:158).

مفهوم «حد»[۴] و کران‌های آن در ریاضیات هم بر اساس فرضیهٔ ریاضیات جسمانی و بر مبنای استعارهٔ پایه بی‌نهایت قابل مفهوم‌سازی است (Lakoff & Núñez, 2000:198). اهمیت بسزای این نگاه در توصیف یافتن جواب برای حدهای مبهم است. همچنین تلفیق هم‌زمان «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» و استعاره‌ای که ریاضی‌دانی به نام جرج کانتور[۵] مبدع آن است یعنی مفاهیم «هم‌اندازه»[۶] و «بزرگ‌تر از»[۷]، امکان درک و استفاده از مفهومی به نام «ترامتناهی»[۸] را برای انسان مهیا می‌سازد که بر اساس آن درجات متفاوتی از بی‌نهایت وجود دارند و بر این مبنا «حساب ترامتناهی»[۹] امکان‌پذیر می‌شود (Lakoff & Núñez, 2000:208).

اعداد «بی‌نهایت کوچک»[۱۰] که به‌نوعی می‌توان آن‌ها را تفاوت اصلی هستی‌شناسی ریاضیات نیوتن و لایب‌نیتس در «حساب دیفرانسیل و انتگرال» دانست، نیز برآمده از «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» هستند (Lakoff & Núñez, 2000:228). همچنین این استعاره برای مفهوم‌سازی «فضا» چه به شکل «پیوستار»[۱۱] و چه به شکل «گسسته‌سازی»[۱۲]شده کاربرد دارد (Lakoff & Núñez, 2000:263).

وورهیس در نقد ایدهٔ لیکاف و نونیس معتقد است که حتی با پذیرش بدنمندی ریاضیات، نمی‌توان مدعی شد که انسان از دست‌یابی به ریاضیات متعالی ناتوان است. او این بحث را در راستای مقولهٔ فراتر کوالیا[۱۳] در فلسفهٔ ذهن و «مسئلهٔ سخت آگاهی»[۱۴] می‌داند (Voorhees, 2004). کوالیا که اشاره به کیفیات ذهنی دارد و آن را در زمرهٔ «کیفیات ثانویه»[۱۵] نیز می‌دانند، برآمده از نوعی تفسیر و ترجمهٔ ذهنی از واقعیات بیرونی است که مشخصه‌هایی نظیر رنگ و بو و ... را برای ما امکان‌پذیر می‌سازد، مشخصه‌هایی که بنفسه در جهان خارج وجود ندارند و برساختهٔ ذهن و ادراک انسانی هستند.

وینتر و یوشیمی فرضیهٔ لیکاف و نونیس را از دید مابعدالطبیعه[۱۶] و هستی‌شناسی[۱۷] خنثی وازدید معرفت‌شناسی[۱۸] بی‌نتیجه و نامعتبر می‌دانند. به باور آنان استعاره‌های مفهومی اگرچه رسانای[۱۹] تفکر انتزاعی[۲۰] هستند، اما عنصر اساسی سازندهٔ[۲۱] آن نمی‌باشند (Winter & Yoshimi, 2020).

وینتر و یوشیمی بر این باورند که چون فقط بخشی از نظریهٔ استعاره‌های مفهومی بر پایه‌های شواهد تجربی بناشده است، نباید تمامیت آن را مورد تأیید تجربه در نظر گرفت و تنها باید به جنبهٔ هدایت ذهنی آن در مفهوم‌سازی مفاهیم انتزاعی توجه داشت و نه مفروض داشتن

[1] Basic metaphor of infinity
[2] Actual infinity
[3] Potential infinity
[4] Limit
[5] Georg Cantor
[6] Same number as
[7] More than
[8] Transfinite
[9] Transfinite arithmetic
[10] Infinitesimals
[11] The continuum
[12] Discretized
[13] Qualia
[14] The hard problem of consciousness
[15] Secondary qualities
[16] Metaphysics
[17] Ontology
[18] Epistemology
[19] Conductive
[20] Abstract thought
[21] Contitutive

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

آن به‌مثابه عنصر اصلی سازندهٔ این تفکر. آنان ضمن اینکه جنبهٔ جسمانیت و بدنمندی در ادراک ریاضیات را نفی نمی‌کنند، معتقدند که این باور به معنای استعاری بودن و جسمانی بودن خاستگاه و اساس ریاضیات نیست (Winter & Yoshimi, 2020).

قهرمان و همکاران واژهٔ نومون[1] و نومونیک[2] در آثار جیمز جویس[3] را الهامی از هندسهٔ متوازی‌الاضلاع در هندسهٔ اقلیدس می‌دانند و نومون را به این شکل تعریف کرده‌اند که متوازی‌الاضلاعی است که از گوشهٔ یک متوازی‌الاضلاع بزرگ‌تر برداشته شود. نقش ابهام در داستان مدرن که خواننده را در جستجوی معنا در مقام تمثیل به شوالیه‌ای به دنبال «جام مقدس»[4] تبدیل می‌کند، در آثار داستانی جیمز جویس در مفهوم «نومونیک» نمایان است (قهرمان و پورگیو، ۱۳۹۱). این همبستگی میان هندسه و ادبیات خود تأییدی است بر نقش لایه‌های ژرف‌تر در نظام شناختی انسان که روساخت‌هایی مانند هندسه و ریاضیات از یک‌سو و ادبیات و هنر از سوی دیگر هر دو برآمده از آن هستند و لذا ساختارهای مفهومیِ برخاسته از قوای شناختی را می‌توان در مظاهر مختلف خلاقیت‌های انسانی دنبال کرد و همچنین به شکل معکوس از این خلاقیت‌ها و نظام نشانه‌ای برآمده از آن‌ها به کشف بخش‌هایی از قوای شناختی بنیادی دست‌یافت.

۳. چارچوب نظری: ذهن بدنمند و مؤلفه‌های آن

۳-۱. جسمانیت و ذهن بدنمند

جانسون طرح‌واره‌های تصویری را که برآمده از بدنمندی هستند مسیری برای پیدایش معنی قلمداد می‌کند و این رویکرد در نقطهٔ مقابل دیدگاه‌های صوری و تحلیلی پیشین نسبت به معنی است. از دید او ساختارهای گشتالتی[5] به‌عنوان قیدی بر معنی، زیرساخت ذهن جسمانی هستند (Johnson, 2013:41-42). او با مطرح ساختن طرح‌وارهٔ مقیاس،[6] نقش امتداد قائم و بُعد ارتفاع را در نگاشتِ برآمده از همبستگی[7] ادراک بدنمند کمیت و ارتفاع موردبحث قرار می‌دهد و طرح‌وارهٔ مقیاس را دارای جهت‌مندی «بیشتر» یا «کمتر» قلمداد می‌کند و شباهت‌های آن با طرح‌وارهٔ مسیر را برمی‌شمرد (Johnson, 2013:121-124).

به همین شکل الگوی استنباط و استدلال نیز ماهیتی جسمانی و برآمده از نظام طرح‌واره‌ای دارند و نمی‌توان جایگاهی متعالی و خارج از ذهن انسان برای آنان قائل شد. از این بابت هر نوع استدلال ریاضی و منطقی و روش‌های استنباطی از بستر ادراک جسمانی و بدنمند برمی‌خیزد و چنین ادعایی در تضاد کامل با رویکرد فیلسوفان خردگرا[8] است که سازوکار استنباطی ذهن انسان را مستقل از جسمانیت او می‌پنداشتند و برای آن جایگاهی متعالی قائل بودند.

به همین سیاق برای تخیل نیز برخلاف دیدگاه‌های افلاطونی و ارسطویی، باید کارکردی جسمانی و طرح‌واره‌ساز تلقی کرد (Johnson, 2013:139-141) که نوع خلاق آن زیرساختی مؤثر در پیشرفت علومی مانند ریاضیات است. از دید جانسون نظریهٔ مناسبی که بتواند ماهیت تخیل را شرح دهد شامل مؤلفه‌هایی نظیر مقوله‌بندی،[9] طرح‌واره‌ها، نگاشت‌های استعاری، کنایه و ساختار روایی است و لذا می‌توان نتیجه گرفت که ریاضیات جسمانی به‌عنوان یکی از کارکردهای مهم تخیل خلاق از تمام این موارد بهره می‌برد.

نظریهٔ ادراک جسمانی حدفاصلی بین عین‌گرایی[10] محض و ذهن‌گرایی[11] محض است و ضمن پذیرش وجود دنیایی در خارج از ذهن انسان، بر این باور است که فهم و درک محدود این دنیا جز از مسیر ادراک بدنمند امکان‌پذیر نیست. (Johnson, 2013:7). از این بابت دسترسی ما به فهم تمامیت ذات واقعیت بیرونی امکان‌پذیر نیست و تنها از مسیر بدنمندی، تصور یا تصویری طرح‌واره‌ای و برآمده از

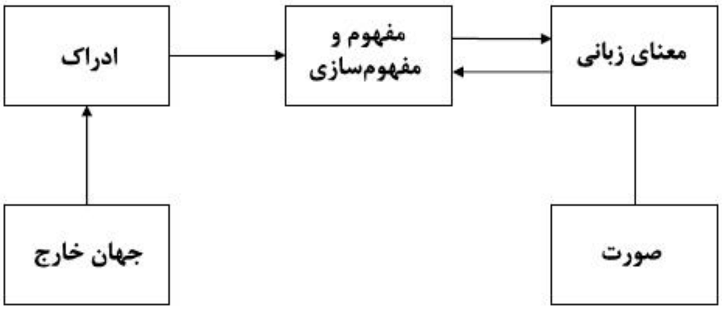
[1] Gnomon
[2] Gnomonic
[3] James Joyce
[4] Holy grail
[5] Gestalt
[6] Scale
[7] Correlation
[8] Rationalist
[9] Categorization
[10] Objectivism
[11] Subjectivism

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

جسمانیت از جهان خارج در ذهن انسان شکل می‌گیرد.

بر اساس نظریهٔ ذهن بدنمند، مطابق شکل (۱) جهان خارج، از مسیر ادراک بدنمند سبب فهم و مفهوم‌سازی شده و این مفاهیم در مسیری دوسویه معانی زبانی را شکل می‌دهند و یا از آن تأثیر می‌پذیرند. درنهایت این معانی در قالب صورت،[1] بازنمود خواهد داشت. ساختار شکل (۱) را می‌توان به مفاهیم و نمادها و صورت‌های ریاضیاتی نیز تعمیم داد.

به‌عنوان‌مثال، نیروی جاذبه به‌عنوان یکی از اجزای جهان خارج، از مسیر ادراک بدنمند انسان که صعود را مستلزم اعمال نیرویی برای غلبه بر جاذبه درک می‌کند، سبب مفهوم‌سازی خاصی خواهد شد که بخشی از طرح‌وارهٔ تصویری فضا را تشکیل می‌دهد، این مفهوم در معنای زبانی و صورت زبانی سبب شکل‌گیری واژگان بالا/پایین می‌شود. به همین شکل این مفهوم سبب می‌شود که در ریاضیات محورهای مختصات سه‌گانه که بازنمایی سه بُعد مکانی جهان قابل‌درک هستند شکل بگیرند و محور عمودی بازنمود راستای اعمال جاذبه است.



شکل ۱- مفهوم‌سازی و ارتباط صورت و معنا در ذهن بدنمند (Evans, 2019:7)

Figure 1- Conceptualization and form-meaning relation in embodied mind (Evans, 2019:7)

۲-۳. طرح‌واره‌های تصویری

لیکاف با ارائه انگاره‌های شناختی آرمانی‌شده[2] بر اساس نظریهٔ پیش‌نمونه‌ها[3] که خود حاصلِ پژوهش‌های روان‌شناسی شناختی است، آن‌ها را نوعی ساخت پیچیدهٔ گشتالتی می‌داند که از چهار نوع ساختارِ برآمده از زبان‌شناسی شناختی استفاده می‌کنند (Lakoff, 2008-2:68): الف. ساختار گزاره‌ای[4] (قالب‌های ذهنی فیلمور[5] (Evans, 2019: 394-402))، ب. ساختار طرح‌واره‌های تصویری (دستور شناختی لانگاکر[6] (Langacker, 2008:33))، پ. نگاشت‌های استعاری (Lakoff, 2008-1: 246)، ت. نگاشت‌های مجازی[7] (Lakoff: 2008-1: 35-40).

مقوله‌ها و مقوله‌بندی طبق ادعای لیکاف در مفهوم‌سازی و شکل‌گیری ساختار طرح‌واره‌ای آن‌گونه که در نظریهٔ انگاره‌های شناختی آرمانی‌شده مطرح می‌شوند، نقش اساسی دارند و این مقوله‌بندی برخلاف رویکردهای تحلیلی و صوری، کاملاً مدرج[8] است و نمی‌توان آن را با دوگانه‌های ارسطوییِ «همه‌یاهیچ» تحلیل کرد (Lakoff, 2008-2:14).

لانگاکر طرح‌واره‌های تصویری را ساختارهای پیش‌مفهومی پایه‌ای قلمداد می‌کند که از طریق ترکیب و نگاشت استعاری به مفاهیم پیچیده‌تر منجر می‌شوند. از دید او این طرح‌واره‌ها نقشی پایه و به عبارتی جایگاه مفاهیمی کمینه در حوزه‌های خاص تجربه را دارند و نمونهٔ آن مفاهیمی چون خط و زاویه و انحنا در فضا است (Langacker, 2008: 33).

از این دید، ساختارهای مفهومی دیگری مانند حوزه،[9] قالب[10] و فضای ذهنی[1] به ترتیب دارای نقش پایه‌ای کمتری از طرح‌واره‌های

[1] Form
[2] Idealized cognitive model
[3] Prototype theory
[4] Propositional structure
[5] Fillmore frames
[6] Langacker’s cognitive grammar
[7] Metonymic mappings
[8] Fuzzy
[9] Domain
[10] Frame

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

تصویری بوده و به شکل سلسله‌مراتبی در امتداد هم قرار می‌گیرند به این شکل که حرکت از طرح‌وارهٔ تصویری به سمت فضای ذهنی سبب کاهش در انتزاع، افزایش عینیت و کاهش در پایه‌ای بودن مفهوم خواهد شد.

طرح‌واره‌های تصویری به‌عنوان انتزاعی‌ترین شکل مفهوم‌سازی ذهن بدنمند، زیرساخت بازنمایی دانش در نظام مفهومی هستند. مهم‌ترین طرح‌واره‌های تصویری عبارت‌اند از: طرح‌وارهٔ فضا، طرح‌وارهٔ ظرف، طرح‌وارهٔ حرکت، طرح‌وارهٔ تعادل، طرح‌وارهٔ نیرو، طرح‌وارهٔ وحدت و شمار، طرح‌وارهٔ هویت و شناسایی[2] و طرح‌وارهٔ وجود[3] (Evans, 2019: 236).

جدول (۱) نشان‌دهندهٔ مهم‌ترین طرح‌واره‌های تصویری و بازنمود آن‌ها در زبان است.

با توجه به شکل (۱) و جدول (۱) طرح‌وارهٔ تصویری فضا سبب مفهوم‌سازی جهات و ابعاد مکانی می‌شود و این مفاهیم در صورت زبانی خود را به شکل واژگان متناظر با طرح‌وارهٔ فضا در جدول (۱) نشان می‌دهند. به همین شکل آمیزهٔ مفهومی خط- نقطه تناظر هر عدد با یک نقطه روی یک خط را مفهوم‌سازی می‌کند و اعمال آن به هر یک از محورهای مختصات سه‌گانهٔ ریاضیاتی بازنمود ریاضی مفاهیم برآمده از طرح‌وارهٔ تصویری فضا است. لذا بر روی محور مختصات مفاهیم بالا و پایین متناظر با اعداد متناظر با نقاط یک خط خواهند شد. اعداد مثبت محور عمودی، نمایش کمّی صعود به بالا و غلبه بر جاذبه و اعداد منفی نیز نمایش کمّی نزول و سقوط هستند.

جدول ۱- مهم‌ترین طرح‌واره‌های تصویری و بازنمود آن‌ها در زبان (Evans, 2019: 236)

Table 1- The most significant image schemas and their representation in language (Evans, 2019: 236)

ردیف	طرح‌وارهٔ تصویری	بازنمود در زبان
۱	فضا	بالا/پایین، جلو/ عقب، راست/ چپ، دور/ نزدیک، مرکز/ محیط، تماس، راستا، تعامد
۲	ظرف	ظرف، داخل/ خارج، سطح، خالی/ پُر، محتوی
۳	حرکت	تکانه، مبدأ/مسیر/حرکت
۴	تعادل	محور، تعادل، تعادل دوکفه‌ای، تعادل نقطه‌ای، توازن
۵	نیرو	برخورد، انسداد، نیروی مخالف، انشعاب، حذف مانع، فعال‌سازی، جذب، مقاومت
۶	وحدت و شمار	ادغام، جمع‌آوری، تفکیک، تکرار، جزء/ کل، مفرد/ جمع، پیوند
۷	هویت و شناسایی	برهم‌نهی، تطابق
۸	وجود	حذف، فضای محدود، چرخه، شیء، فرآیند

۳-۳. ساختارهای مفهومی

ساختارهای مفهومی که برآمده از بدنمندی و در سطح انتزاعی برآمده از طرح‌واره‌های تصویری هستند نقش بسزایی در تولید معنا ایفا می‌کنند. ازجمله مهم‌ترین ساختارهای مفهومی می‌توان از مجاز مفهومی، استعارهٔ مفهومی و آمیزهٔ مفهومی نام برد.

مجاز مفهومی[4] یک ساختار مفهومی است که نگاشتی از داخل یک حوزه به درون همان حوزه صورت می‌دهد (Evans, 2019: 336). به‌عبارت‌دیگر مجاز شکلی زبانی و فکری است که در آن یک‌چیز برای اشاره یا دسترسی به چیز دیگری به کار می‌رود که با آن مرتبط است (Littlemore, 2015: 4).

تفاوت عمدهٔ مجاز مفهومی با استعارهٔ مفهومی در این است که مجاز عنصری از یک حوزه را به عنصر دیگری در همان حوزه می‌نگارد، اما استعاره نگاشتی است از یک حوزه به حوزهٔ دیگر (Evans, 2019: 336). البته برخی از استعاره‌ها برآمده از مجاز هستند و در حقیقت براثر تفکیک حوزه‌هایی که مشترک بوده‌اند، ایجاد شده‌اند.

استعاره‌های مفهومی، حاصلِ نگاشت یک حوزهٔ مفهومی به یک حوزهٔ مفهومی دیگر هستند (Evans, 2019: 300). از همین رو ردپای

[1] Mental space
[2] Identity
[3] Existence
[4] Conceptual metonymy

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

آن را در فرضیهٔ ریاضیات جسمانی نیز می‌توان دنبال کرد. به‌عنوان مثال، نمایش نقاط بر روی خطوط هندسی نوعی استعارهٔ مفهومی است که بر اساس آن نقاط، متناظر با کمیت، بر روی خطوط هندسی مفهوم‌سازی می‌شوند. به عبارت بهتر، این استعاره بیان می‌دارد که اعداد، نقاطی بر روی خطوط هندسی هستند. محورهای مختصات که هرکدام نشان‌دهندهٔ یک بُعد فیزیکی هستند در قالب همین استعاره جای می‌گیرند. به‌عبارت‌دیگر، هر بُعد فیزیکی با یک خط هندسی جهت‌دار به شکل استعاری مفهوم‌سازی شده و هر نقطه بر روی آن نگاشت استعاری یک عدد است. مثال دیگر استفاده از نمادها در منطق نمادی است که بر مبنای ماهیت استعاری خود، استدلال منطقی و ریاضیاتی را برحسب نمادها مفهوم‌سازی می‌کند.

آمیزهٔ مفهومی یک ترکیب از دو ساختار شناختی مختلف است که تناظرهای ثابتی میان آن‌ها برقرار است. بدیهی است که در آمیزه، هستی‌های جدید به وجود می‌آیند (Lakoff & Núñez, 2000: 48). به عبارت دیگر، ویژگی‌های گزینشی دو مفهوم باهم ترکیب می‌شوند و مفهوم سومی را تشکیل می‌دهند (Langacker, 2008: 36).

در نظریهٔ آمیزهٔ مفهومی یک فرآیند پویا مسبب ترکیب حوزه‌های گوناگون در فضای ذهنی خواهد شد که خود این فرآیند زیربنای پدیدآیی[1] ساختارهای مفهومی جدیدی در فضای ذهنی برخط[2] است (Evans, 2019: 530).

چنین ساختاری در فرضیهٔ ریاضیات جسمانی نیز قابل رصد است. به‌عنوان‌مثال، در بخش اول گزارهٔ «معادلهٔ ریاضی x = y خط راستی است که از مبدأ مختصات می‌گذرد و دارای شیب ۱ است»، ورودی اول خط راست، ورودی دوم مبدأ مختصات و فضای عمومی، معادلهٔ ریاضی است. در فضای آمیزش مفهوم جدیدی به شکل پدیدآیی به وجود می‌آید که این مفهوم جدید در بخش دوم گزاره یعنی شیب ۱ (شیب عبارت است از نسبت عرض به طول هر نقطه از خط راست) بیان‌شده است. باید در نظر داشت که حتی در صورت حذف بخش دوم گزاره هم، پدیدآیی مفهوم آن از آمیزهٔ مفهومی مذکور قابل استنتاج است.

اگر مشخصات و تناظرهای ثابت یک آمیزهٔ مفهومی خود برآمده از استعاره باشند، آمیزهٔ مفهومی استعاری[3] نامیده می‌شود. مانند آمیزهٔ عدد- خط در ریاضیات که هر عدد را ضمن این‌که ماهیت استعاری دارد، متناظر با نقطه‌ای بر روی یک خط و یا محور مختصاتی مفهوم‌سازی می‌کند (Lakoff & Núñez, 2000: 60).

در فرضیهٔ ریاضیات جسمانی، آمیزه‌های مفهومی اعم از استعاری و غیراستعاری بسیار پرکاربرد هستند و طبق ادعای لیکاف و نونیس، فهم ریاضیات مستلزم تسلط بر آمیزه‌های مفهومی است و مهم‌ترین ایده‌ها در ریاضیات اکثراً آمیزه‌های مفهومی استعاری هستند (Lakoff & Núñez, 2000: 48).

٤. تحلیل داده‌ها

٤-١. عدد

اعداد طبیعی[4] که در حقیقت اعداد صحیح[5] مثبت هستند و با افزودن عدد صفر به آن‌ها مجموعه‌ای به نام اعداد حسابی[6] تولید خواهد شد، در سطح طرح‌واره‌ای برآمده از طرح‌وارهٔ وحدت و شمار[7] بوده و بر اساس ادراک بدنمند انسان از گسستگی اشیاء و تفکیک آن‌ها شکل گرفته‌اند. نوعی مجاز کل به‌جای جزء در اختصاص دادن یک عدد خاص مثلاً عدد دو به مقوله‌هایی متفاوت مانند دو سیب، دو انسان و یا دو سنگ قابل‌شناسایی است. بدیهی است که استفادهٔ از سیستم عددی ده‌دهی[8] و فراگیری آن به علت یک مشخصهٔ همگانی جسمانی انسان است و آن عبارت است از تعداد انگشتان دست‌وپا که فرآیند شمارش برمبنای آن ساده‌تر مفهوم‌سازی می‌شود.

[1] Emergence
[2] On-line mental space
[3] Metaphoric blending
[4] Natural numbers
[5] Integers (Whole numbers)
[6] Arithmetic numbers
[7] Unity/Multiplicity
[8] Decimal

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

اعمالِ طرح‌وارهٔ فضا به اعداد طبیعی سبب زایش مفاهیم عددی جدید خواهد شد. ظرف یا فضای خالی استعاره‌ای به نـام عـدد صـفر را تولید می‌کند که در کنار مجموعهٔ اعداد طبیعی، مجموعهٔ جدیدی به نام اعداد حسابی را خواهد ساخت. اعداد حسـابی ماننـد ظرفـی اعـداد طبیعی را در برمی‌گیرند وازدید جبر مجموعه‌ها، اعداد طبیعی زیرمجموعهٔ اعداد حسابی هستند.

جهت در فضا (آمیزهٔ طرح‌وارهٔ فضا و طرح‌وارهٔ حرکت) سبب تولید استعاره‌ای به نام اعـداد منفـی خواهـد شـد کـه بیـانگر حرکـت در جهت وارون یا دوران صدوهشتاد درجه‌ای هستند و این استعاره، مولد آمیزهٔ اسـتعاری جدیـدی بـه نـام اعـداد صـحیح می‌شـود کـه ظـرف دربرگیرندهٔ اعداد طبیعی و اعداد حسابی است.

طرح‌وارهٔ فضا و ظرف و اعمالِ آن به اعداد طبیعی مجموعاً استعاره‌ای جدید به نام اعداد گویا[1] را تولید می‌کنند که بـرای مفهوم‌سـازی اشغال فضا در ظرف به کار می‌رود. نسبتِ اشغال فضا در یک ظرف الزاماً یک نسبت صحیح نیست و بر همین اساس اعداد کسری یـا گویـا تولید می‌شوند. مجموعهٔ اعداد گویا ظرف بزرگ‌تری است که تمام مجموعه‌های عددی پیشین را در برمی‌گیرد.

آمیزش طرح‌وارهٔ حرکت و طرح‌وارهٔ فضا، مولد مجموعهٔ جدیدی به نام اعداد گنگ[2] می‌شود. به‌عنوان‌مثال حرکت به‌اندازهٔ یک واحد در یک‌جهت و سپس حرکت به‌اندازهٔ یک واحد در جهتی عمود بر آن بیانگر مسافتی است که با مجموعهٔ اعداد گویا قابل‌بیان نیسـت. ایـن عدد (جذر عدد ۲) که بر اساس قضیهٔ منسوب به فیثاغورس قابل‌محاسبه است، یک عـدد گنـگ خواهـد بـود. اعـداد گنـگ و گویـا دارای اشتراک (از دید جبر مجموعه‌ها) نیستند. ظرف کاملی که مجموعهٔ اعداد گویا و اعداد گنگ را باهم در برمی‌گیرد، مجموعهٔ اعداد حقیقی[3] نام دارد.

با اتکا به آمیزهٔ ناشی از طرح‌وارهٔ فضا و طرح‌وارهٔ حرکت، مفهوم‌سازی دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ قائمه سبب زایش اعداد موهـومی[4] خواهـد شد (Lakoff & Núñez, 2000: 426). در حقیقت با توجه به اینکه دوران صدوهشتاد درجه‌ای مولد عـدد منفـی اسـت، دوران نـود درجـه‌ای عددی تولید خواهد کرد که جذر یک عدد منفی است. رابطهٔ ۱ نشان‌دهندهٔ معادله‌ای است که جواب آن عدد موهومی پایه (i) است.

رابطهٔ ۱: عدد موهومی پایه (i) به‌عنوان جواب معادلهٔ مقابل

$$x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \; x = \sqrt{-1} = i$$

ظرف کاملی که اعداد حقیقی و اعداد موهومی را در برمی‌گیرد، مجموعهٔ اعداد مختلط[5] نام دارد.

مجموعهٔ اعداد مختلط اهمیت ویژه‌ای در مباحـث ریاضـیات مهندسـی، معـادلات دیفرانسـیل[6] و تحلیـل حالـت گـذرا و حالـت دائمـی سامانه‌های مهندسی دارند و بخش موهومی آن‌ها نشان‌دهندهٔ تناوب و نوسان است. در حقیقت یکـی از تبیین‌هـای بدنمنـد اعـداد موهـومی، ریاضی‌سازی ادراک انسانی از تناوب و نوسان است.

٤-٢. عملگرهای پایهٔ حسابی

همهٔ عملگرهای پایه حسابی[7] قابل استنتاج از عملگر پایه جمع[8] هستند. به‌عنوان‌مثال تفریق[9] عبارت است از جمع یک عدد و قرینهٔ یک عـدد مثبت دیگر، ضرب[10] عبارت است از جمع چندبارهٔ یک عدد، تقسیم[11] عبارت است از ضرب یـک عـدد در معکـوس عـدد دیگـر، تـوان[12] عبارت است از ضرب متوالی یک عدد در خود، و جذر[13] عبارت است از فرایند معکوس توان. لذا بدیهی است که ادراک بدنمنـد عملگـر

[1] Rational numbers
[2] Irarational numbers
[3] Real numbers
[4] Imaginary numbers
[5] Complex numbers
[6] Differential equations
[7] Arithmetic operations
[8] Addition
[9] Subtraction
[10] Multiplication
[11] Division
[12] Power
[13] Root

جمع زیربنای ابداع سایر عملگرهای حسابی خواهد شد.

مفهوم افزایش و هم‌افزایی یکی از مفاهیمی است که در چارچوب طرح‌واره‌های تصویری مختلفی مانند فضا (افزایش ارتفاع)، ظرف (پر شدن)، حرکت (نزدیک شدن به مقصد) و ... در نظام اندیشه انسانی و مفهوم‌سازی ذهنی نقش ایفا می‌کند. این مفهوم در استعاره‌های مفهومی متفاوتی مانند «بیشتر به‌مثابه بالاتر»[1] (طرح‌وارهٔ تصویری فضا، مثال: بالا رفتن تورم به معنای افزایش تورم)، «گسترش مفاهیم انتزاعی به‌مثابه افزایش مفاهیم عینی» (طرح‌وارهٔ تصویری ظرف، مثال: افزایش علم، افزایش احترام)، «بیشتر شدن موفقیت به‌مثابه نزدیک‌تر شدن به مقصد» (طرح‌وارهٔ تصویری حرکت، مثال: هرلحظه ز چرخ بیش می‌باید رفت)، به‌کاررفته است.

در ریاضیات و حساب، عملگر جمع، تصویری از ادراک بدنمند مفهوم افزایش و هم‌افزایی است. این مفهوم در جبر برداری خود را به‌صورت جمع بردارها و در جبر مجموعه‌ها به شکل عملگر اجتماع نمایش می‌دهد.

بر اساس استعارهٔ «حساب به‌مثابه کلکسیون شئ» که برآمده از طرح‌وارهٔ تصویری فضا است، اشیاء به‌عنوان حوزهٔ مبدأ با نگاشتی استعاری به اعداد به‌عنوان حوزهٔ مقصد فرافکنی می‌شوند. بر این اساس عملگرهای حسابی پایه، نوعی نگاشت استعاری برای این ادراک هستند که اشیاء در یک کلکسیون به هم افزوده‌شده (جمع) و یا از هم کاسته می‌شوند (تفریق). عملگرهای ضرب، تقسیم، توان و جذر نیز به همین شکل قابل توصیف هستند. عدد صفر نیز بر اساس استعارهٔ «هستی خلق‌کن»[2] حاصل نگاشتن اشیا به کلکسیون تهی است.

با استفاده از استعارهٔ «حساب به‌مثابه ساختمان شئ» که روایت خاص‌تری از «حساب به‌مثابه کلکسیون شئ»[3] است و توان تجزیهٔ اعداد به اجزا و توصیف کسرها را دارد، مجموعه‌های عددی نظیر مجموعهٔ اعداد گویا تولید و مفهوم‌سازی می‌شوند.

استعارهٔ دیگری نظیر «حساب به‌مثابه خط‌کش معیار» که برآمده از طرح‌وارهٔ تصویری حرکت است، امکان نگاشت استعاری حرکت را بر اعداد مهیا می‌سازد، در این استعاره نقطهٔ صفر خط‌کش یا همان مبدأ، بر روی عدد صفر و یا مجموعهٔ تهی فرافکنی می‌شود. عملگر جمع در این استعاره نماد افزایش عدد بر روی خط‌کش است.

استعارهٔ «حساب به‌مثابه حرکت در امتداد یک مسیر» هم که همچنان برآمده از طرح‌وارهٔ تصویری حرکت است، علاوه بر حسابی‌سازی حرکت (مبدأ– مسیر– مقصد)، با کمک طرح‌وارهٔ تصویری فضا امکان توصیف هندسی حساب و تعمیم به جبر برداری را ایجاد می‌نماید. عملگر جمع در این استعاره در حکم افزایش مسیر طی شده است.

٤-۳. بی‌نهایت

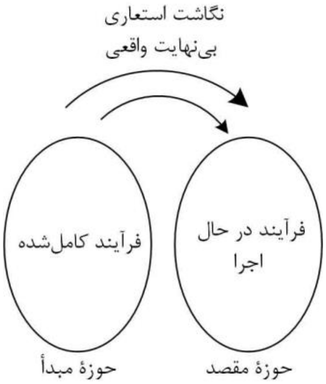
مفهوم بی‌نهایت بر اساس «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» ساخته می‌شود. «بی‌نهایت واقعی» بر اساس این استعاره به‌صورت نگاشت یک فرایند کامل‌شده بر روی یک فرایند در حال اجرا مفهوم‌سازی می‌شود. مثالِ «بی‌نهایت واقعی» مجموعه‌های نامتناهی نظیر مجموعهٔ اعداد طبیعی و اعداد حقیقی است.

«بی‌نهایت بالقوه» مانند افزایش اضلاع چندضلعی‌های منتظم نیز خود سبب مفهوم‌سازی‌های در ریاضیات شده است. به‌عنوان مثال، با افزایش اضلاع چندضلعی‌های منتظم عددی گنگ و مهم به نام عدد π تولید می‌شود. و یا عدد گنگ دیگری به نام عدد e حاصل مفهوم‌سازی از «بی‌نهایت بالقوه» در محاسبه نرخ سود و بهره است.

مفهوم «بی‌نهایت واقعی» بر اساس «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» و به شکل نگاشت شکل (۲) قابل‌نمایش است.

[1] More as up
[2] Entity-creating
[3] Arithmetic as object construction

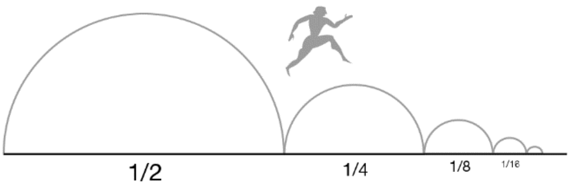
https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882



شکل ۲- نگاشت استعاری مولد «بی‌نهایت واقعی»: فرایند کامل‌شده به‌عنوان حوزهٔ مبدأ و فرایند در حال اجرا به‌عنوان حوزهٔ مقصد

Figure 2- Metaphorical mapping of the "actual infinity": the completed process as the origin domain and the ongoing process as the target domain

همچنین «بی‌نهایت واقعی» راه‌حلی است برای به نتیجه رساندن تناقض‌نمایی[1] به نام «تناقض‌نمای زنون»[2] (شکل ۳) با این پرسش که آیا دونده‌ای که در هر گام نصف گام پیشین را طی می‌کند، به مقصد می‌رسد؟ با استفاده از مفهوم «بی‌نهایت واقعی» پاسخ بله است. در حقیقت اگر به چشم «بی‌نهایت بالقوه» به این تناقض‌نما بنگریم، پاسخ خیر خواهد بود، اما از منظر «بی‌نهایت واقعی» به پاسخ بله می‌رسیم. رابطهٔ (۲) نحوهٔ تبدیل این «بی‌نهایت بالقوه» به «بی‌نهایت واقعی» را نمایش می‌دهد.



شکل ۳- تناقض‌نمای زنون

Figure 3- Zeno’s paradox

رابطهٔ ۲: دنبالهٔ متناظر با «تناقض‌نمای زنون»

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

«استعارهٔ پایه بی‌نهایت» سبب ابداع روشی به نام «استقرای ریاضی»[3] نیز شده است. این روش که یک روش اثباتی برای قضایای ریاضی است، ابتدا درستی یک گزاره را برای یک مقدار اولیه تصدیق می‌کند و سپس با اثبات اینکه در صورت درستی گزارهٔ n اُم، گـزارهٔ n+1 اُم هم درست است، قضیه را به اثبات می‌رساند (n یک عدد طبیعی است). اثبات قضیه برای تمام بی‌نهایت عدد طبیعی ناممکن است، اما روش استقرای ریاضی با استفاده از «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» این ناممکن را ممکن می‌سازد. ایـن روش را می‌تـوان حالـت خاصـی از «اسـتعارهٔ پایـه بی‌نهایت» دانست.

٤-٤. اعداد بی‌نهایت کوچک و مفهوم حد

«اعداد بی‌نهایت کوچک»[4] یعنی اعدادی که از صفر بزرگ‌تر بوده، ولی از هر عدد حقیقی دیگری کوچک‌تر هستند نیز یکی از محصولات

[1] Paradox
[2] Zeno’s paradox
[3] Mathematical induction
[4] Infinitesimals

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

«استعارهٔ پایه بی‌نهایت» است. چنین مفهومی تنها بر اساس استعارهٔ مذکور مفهوم‌سازی می‌شود و مبنای اساسی شکل‌گیری مفاهیمی مانند «حد»[1] و «مشتق»[2] است. از دید «بی‌نهایت بالقوه» کاهش دادن یک عدد به‌عنوان‌مثال مسافت طی شده توسط دونده در «تناقض‌نمای زنون» (شکل ۳)، تا ابد قابل ادامه است، اما استفاده از «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» و مفهوم «حد» سبب می‌شود تا نهایتی عددی برای این فرایند تکراری و بی‌پایان منظور شود و بر این اساس «اعداد بی‌نهایت کوچک» مفهوم‌سازی می‌شوند.

به شکل خلاصه، مفهوم «بی‌نهایت» و «بی‌نهایت کوچک» مفاهیمی انتزاعی و استعاری هستند که نمود عینی بیرونی ندارند و تنها بر اساس «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» مفهوم‌سازی می‌شوند. مفهوم «حد» بر اساس «اعداد بی‌نهایت کوچک» قابل‌شرح است و حد تابع f(x)، وقتی‌که x به سمت عددی مانند c میل می‌کند برابر است با عدد L اگر و فقط اگر قدر مطلق تفاضل f(x) و L کوچک‌تر باشد از یک «عدد بی‌نهایت کوچک» به نام (ε). رابطهٔ ۳ بیانگر این مفهوم است.

رابطهٔ ۳: حد تابع f(x)

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

٤-٥. اعداد ترامتناهی

طبق استعاره‌های مورداستفاده توسط جرج کانتور که عبارت‌اند از «هم‌اندازه» و «بزرگ‌تر از»، دو مجموعه اگر دارای تناظر یک‌به‌یک باشند باهم هم‌اندازه و برابر هستند و در غیر این صورت یکی از دیگری بزرگ‌تر است. این دو استعاره برآمده از هر دو طرح‌وارهٔ تصویری ظرف و فضا بوده و ریشه در نظام اندیشهٔ انسانی دارند که طبق آن دو ظرف یا دو بخش از فضا یا باهم هم‌اندازه هستند و یا یکی از دیگری بزرگ‌تر است. کانتور به این روش اثبات کرد مجموعهٔ اعداد طبیعی با مجموعهٔ اعداد گویا هم‌اندازه است. او به همین روش نیز اثبات کرد که مجموعهٔ اعداد حقیقی از مجموعهٔ اعداد گویا بزرگ‌تر است. بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که برخی از بی‌نهایت‌ها از برخی دیگر از بی‌نهایت‌ها بزرگ‌تر هستند و تمام این مفاهیم و روش‌ها در نقطهٔ شروع از «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» استخراج می‌شوند. همچنین، کانتور به این روش اثبات کرد که تعداد عناصر مجموعهٔ توانی از مجموعهٔ اصلی بیشتر است. یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی از مجموعه‌ای که حاوی اعداد به توان اعداد طبیعی است کوچک‌تر است و بر همین اساس به این نتیجه رسید که مجموعهٔ اعداد حقیقی با مجموعهٔ توانی هم‌اندازه خواهد بود.

دیوید هیلبرت با استفاده از یک آزمایش فکری در قالب یک آمیزهٔ مفهومی که به نام «هتل هیلبرت»[3] معروف است، مفهوم ترامتناهی و اینکه برخی از بی‌نهایت‌ها از برخی دیگر بزرگ‌ترند را شرح داد.

از دید معناشناسی شناختی مشخص است که مفهوم بی‌نهایت تنها از طریق استعاره قابل مفهوم‌سازی است، زیرا که چنین مفهومی در جهان خارج و به شکل عینی وجود ندارد. اما وجود اعداد ترامتناهی و قائل شدن درجاتی برای خود بی‌نهایت نیازمند استعاره‌های جدیدتری است که توسط کانتور استفاده شد.

وجود مفهوم ترامتناهی سبب خواهد شد که به لحاظ مفهومی بتوانیم درکی از رفع ابهام حالت‌های حدی مانند $\frac{\infty}{\infty}$ داشته باشیم. زیرا بی‌نهایت‌ها الزاماً باهم برابر نیستند.

اعداد ترامتناهی خود قابل‌تقسیم به دودستهٔ «ترامتناهی اصلی»[4] و «ترامتناهی ترتیبی»[5] هستند.

٤-٦. حساب دیفرانسیل و انتگرال

«حساب دیفرانسیل و انتگرال»[6] یا حسابان که بر مبنای دو مفهوم «مشتق» یا «دیفرانسیل»[7] و «انتگرال»[1] شکل گرفته است، یکی از بزرگ‌ترین

[1] Limit
[2] Derivative
[3] Hilbert's infinite hotel
[4] Cardinal transfinite
[5] Ordinal transfinite
[6] Calculus
[7] Differntial

https://doi.org/10.22108/jrl.2025.143506.1882

دستاوردهای ریاضیات به شمار می‌رود که در علوم مختلف کاربرد دارد. نیوتن و لایب‌نیتس هر دو مستقلاً به مفهوم «مشتق» یا «دیفرانسیل» دست یافتند و با استفاده از «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» و «اعداد بی‌نهایت کوچک» این شاخهٔ مهم از ریاضیات را ابداع کردند. رویکرد مفهومی حاکم بر ایدهٔ مشتق و انتگرال به‌نوعی برآمده از دیدگاه دکارت است که معتقد بود برای حل یک مسئله باید ابتدا تا جای ممکن آن را به اجزای خرد و مسائل کوچک‌تر شکافت و پس از حل مسئله برای این اجزا، نتایج حاصل را با هم جمع کرد و به حل مسئلهٔ اصلی و کلان رسید. این رویکرد، یک رویکرد خطی است که ساختار، فرآیند و سازوکارهای حاکم بر جهان را خطی می‌انگارد و اگرچه در بسیاری از موارد ازجمله در سامانه‌های خطی مدنظر در علوم مهندسی پاسخگو است، در بسیاری از موارد دیگر که سازوکارهای غیرخطی حاکم هستند (مانند بسیاری از سامانه‌های واقعی) راه به‌جایی نمی‌برد. در ریاضیات دیفرانسیلی، جزء خُرد برای حل یک مسئله همان «دیفرانسیل» است. در حقیقت یک تابع ریاضی و یا یک منحنی را می‌توان با استفاده از «استعارهٔ پایه بی‌نهایت»، مجموع بی‌نهایت جزء بسیار کوچک (اعداد بی‌نهایت کوچک) دانست. پاسخ‌های به‌دست‌آمده از حل مسئله برای هرکدام از این اجزا را درنهایت به هم افزوده (فرایند انتگرال‌گیری) و به پاسخ کلان خواهیم رسید (تعمیم عملگر جمع برآمده از استعارهٔ حساب به‌مثابه کلکسیون شئ). معانی واژه‌های «مشتق»، «دیفرانسیل» و «انتگرال» خود استعاره‌های مفهومی هستند که بر اساس استعارهٔ «حساب به‌مثابه ساختمان شئ»، مفاهیم مورداستفاده در مورد اشیاء را به حوزهٔ انتزاعی‌تر ریاضیات فرافکنی می‌کنند.

بدیهی است که جزء دیفرانسیلی یک پدیدهٔ واقعی و عینی نیست که در جهان خارج وجود داشته باشد، بلکه یک مفهوم استعاری است که بر اساس «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» ساخته‌شده و به کار می‌رود. لایب‌نیتس در رویکرد فلسفی خود به نام «مونادولوژی»[۲]، از جوهرهای بی‌شماری به نام «موناد»[۳] نام می‌برد که مادی نبوده و سازندهٔ جهان هستند و به نظر می‌رسد که این واژه از کتاب اصول نوشتهٔ اقلیدس وام گرفته شده باشد. اقلیدس این واژه را به معنای واحد به‌کاربرده است (صانعی دره‌بیدی، ۱۴۰۰:۱۸۲). مفهوم «دیفرانسیل» تصویر همین ایده بر روی ریاضیات است.

آمیزهٔ هندسهٔ تحلیلی که فضاهای هندسه، جبر و حساب را باهم تلفیق می‌کند، سبب‌ساز تعمیم «حساب دیفرانسیل و انتگرال» به فضاهای هندسی و ابعاد بالاتر است و این رویکرد کاربرد حسابان را در علم کیهان‌شناسی امکان‌پذیر می‌سازد.

۵. نتیجه

بدنمندی در حساب که به روایتی قدیمی‌ترین شاخهٔ ریاضیات است، مشهود و به‌آسانی قابل رصد است. به‌عنوان مثال، سیستم ده‌دهی شمارش که برگرفته از تعداد انگشتان دست‌وپا است، اعداد طبیعی که «مجاز کل به‌جای جزء» هستند و سایر مجموعه‌های اعداد از طریق آن‌ها قابل‌دستیابی است، عملگرهای حسابی که از عملگر پایهٔ جمع قابل‌استخراج‌اند و از طرح‌واره‌های تصویری حاصل می‌شوند، مفاهیمی مانند بی‌نهایت، بی‌نهایت کوچک و اعداد ترامتناهی که حاصلِ استعاره‌های مفهومی هستند، مفهوم حد که بر اساس «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» قابل حصول است و در نهایت، «حساب دیفرانسیل و انتگرال» که تعمیم «استعارهٔ پایه بی‌نهایت» و مفهوم «حد» در زایش مفاهیمی مانند «مشتق» (دیفرانسیل) و «انتگرال» است.

جدول (۲) نشان‌دهندهٔ برخی از مهم‌ترین مفاهیم پایهٔ حساب، طرح‌واره‌های تصویری زایندهٔ آن‌ها و ساختارهای مفهومی شکل‌دهنده به آن‌ها است.

بدیهی است که موارد ذکرشده در ستون «تعمیم طرح‌واره‌ای» در جدول (۲)، به‌قصد ساده‌سازی مفاهیم عنوان‌شده‌اند و در حالت کلی، انواع پیچیده‌تری از تعمیم طرح‌واره‌ای در مورد حساب قابل‌کشف و رصد است.

[1] Integral
[2] Monadology
[3] Monad

جدول ۲- برخی از مهم‌ترین مفاهیم پایهٔ حساب، طرحواره‌های تصویری زایندهٔ آن‌ها و ساختارهای مفهومی شکل‌دهنده به آن‌ها

Table 2- Some of the most important basic concepts of arithmetic, the image schemas that generate them, and the conceptual structures that shape them

مفاهیم حساب	ساختار مفهومی متناظر	طرحوارهٔ تصویری پایه	تعمیم طرحواره‌ای
اعداد طبیعی	مجاز کل به‌جای جزء	طرحوارهٔ وحدت و شمار	مجموعه اعداد حسابی، صحیح، گویا، گنگ، حقیقی، مختلط
عملگر جمع	استعارهٔ مفهومی افزایش و هم‌افزایی	طرحوارهٔ ظرف	عملگرهای پایهٔ تفریق، ضرب، تقسیم، توان و جذر
بی‌نهایت	استعارهٔ پایهٔ بی‌نهایت	طرحوارهٔ حرکت	اعداد بی‌نهایت کوچک، اعداد ترامتناهی
حد	استعارهٔ پایهٔ بی‌نهایت	طرحوارهٔ حرکت	مشتق (دیفرانسیل)
حساب دیفرانسیل و انتگرال	استعارهٔ پایهٔ بی‌نهایت	طرحوارهٔ حرکت	معادلات دیفرانسیل

منابع فارسی

صال‌مصلحیان، محمد. *فلسفهٔ ریاضی (کلاسیک، مدرن، پست مدرن)*. (۱۳۸۴) انتشارات واژگان خرد.

صانعی دره‌بیدی، منوچهر. (۱۴۰۰). *فلسفهٔ لایب‌نیتس*. انتشارات ققنوس.

قهرمان، امید. پورگیو، فریده. (۱۳۹۱). *تأثیر هندسه اقلیدسی (نومون/متوازی الاضلاع) بر شیوهٔ روایت و شخصیت‌پردازی در آثار جیمز جویس*. پایان‌نامهٔ دکتری تخصصی رشتهٔ ادبیات انگلیسی، دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه شیراز.

References

Evans, V. (2019). *Cognitive linguistics: A complete guide*. Edinburgh University Press.

Ghahreman, O. Pourgive, F. (2013). *The Influence of Euclid's gnomon on James Joyce's narrative and characterization*. Ph. D Dissertation in English Litrature. Faculty of Literature and Humanities, Shiraz University. [In Persian]

Johnson, M. (2013). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason.* University of Chicago press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (2008). *Metaphors we live by*. University of Chicago press.

Lakoff, G. (2008). *Women, fire, and dangerous things: What categories reveal about the mind.* University of Chicago press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (Vol. 6). Basic Books.

Langacker, R. W. (2008). *Cognitive grammar: A basic introduction.* Oxford University Press.

Littlemore, J. (2015). *Metonymy*. Cambridge University Press.

Livio, M. (2010). *Is God a mathematician?* Simon and Schuster.

Sal Moslehian, M. (2005). *Philosophy of Mathematics.* Vazhegan-e-Kherad. [In Persian]

Sanei Dare Bidi, M. (2021). *Leibniz's philosophy*. Qoqnoos. [In Persian]

Voorhees, B. (2004). Embodied mathematics. *Journal of Consciousness Studies 11*, 83-88.

Winter, B., & Yoshimi, J. (2020). Metaphor and the philosophical implications of embodied mathematics. *Frontiers in Psychology 11*, 569487.